SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

*Fausto Ferrari*

# TEOREMI DI TIPO HARNACK PER FUNZIONI ARMONICHE SU DOMINI CON FRONTIERA HÖLDERIANA

8 giugno 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

**Riassunto.**
In questa nota presenterò alcuni risultati, ottenuti con tecniche non-probabilistiche, riguardanti teoremi di tipo Harnack per funzioni armoniche su domini la cui frontiera è localmente il grafico di una funzione hőlderiana.

**Abstract.** In this note, by applying non-probabilistic tecniques, I shall prove some results about Harnack's theorems for harmonic functions on domains with boundary that is locally the graph of a Hőlder function.

# 1 Introduzione

Ricordiamo che in generale se $L = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j})$ è un operatore uniformemente ellittico su $D \subset R$, cioè se esistono $\lambda$, $\Lambda \in R^+$ tali che:

$$\lambda\|\xi\|^2 < \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j < \Lambda\|\xi\|^2$$

per ogni $x \in D$ e per ogni $\xi \in R^d$; posto:

$$B_{x_0,r} = B(x_0,r) = \{x \in R^d : \|x - x_0\| < r\}, \quad T_{x_0,r} = B(x_0,r) \cap D,$$
$$\sum_{x_0,r} = \partial T_{x_0,r} \setminus \partial D, \quad \triangle_{x_0,r} = \partial T_{x_0,r} \setminus \sum_{x_0,r},$$

$u$ e $v$ soluzioni locali non-negative su $D$ di $Lu = 0$ in $D$, $u = v = 0$ su $\triangle_{x_0,2r}$, allora possiamo riassumere i cosiddetti teoremi di tipo Harnack alla frontiera nel modo seguente:

a) Pricipio di Harnack alla frontiera

Esistono $c_1(d)$, costante positiva, $y(r) \in T_{x_0,r}$ posto a distanza di ordine $r$ sia da $x_0$ che dalla frontiera $\partial D$, tali che per ogni $x \in T_{x_0,r}$ vale:

$$u(x) \leq c_1(d)(\frac{\|x - x_0\|}{r})^\gamma u(y(r))$$

dove $0 < \gamma < 1$.

b) Teorema di confronto alla frontiera

Esistono $c_2(d)$, costante positiva, $y(r) \in T_{x_0,r}$ posto a distanza di ordine $r$ sia da $x_0$ che dalla frontiera $\partial D$ tali che per ogni $x \in T_{x_0,r}$ vale:

$$\frac{u(x)}{v(x)} \leq c_2(d)\frac{u(y(r))}{v(y(r))}.$$

c) Teorema di duplicazione

Esiste una costante $c(d, L)$ tale che per ogni $x_0 \in \partial D$ e per ogni $r$ sufficientemente piccolo vale:

$$\omega^x_{L,D}(\triangle_{x_0,2r}) \leq c(d, L)\omega^x_{L,D}(\triangle_{x_0,r})$$

per ogni $x \in D \setminus B_{x_0,3r}$, dove $\omega^x_{L,D}$ è la misura L-armonica su $D$ valutata in $x$.

Questi risultati sono stati dimostrati per domini con frontiera lipschitziana e più in generale per domini N.T.A., cioè non tangenzialmente accessibili, grazie al contributo di numerosi autori fra i quali: Dahlberg [3], Caffarelli-Fabes-Mortola-Salsa [2], Jerison e Kenig [6].

Con i lavori di due probabilisti, Bass e Burdzy [1] si ha un primo superamento dei risultati precedenti. Infatti indebolendo le condizioni poste sulla regolaritá della frontiera di $D$, considerando cioè insiemi la cui frontiera localmente è il grafico di una funzione hőlderiana, è possibile ottenere alcuni risultati analoghi a quelli elencati nei punti a), b) e c).

**Def. 1.1** *$D$ è un dominio hölderiano di ordine $\alpha$, $\alpha \in ]0,1]$ se per ogni $x \in D$ esistono $r_x \in R^+$, un sistema di coordinate $CS_x$ e una funzione $\Gamma_x$ Hölder continua di ordine $\alpha$ tali che:*

$$D \cap B(x, r_x) = \{y : (y_1, \cdots, y_{d-1}, y_d) \text{ in } CS_x,\ y_d > \Gamma_x(y_1, \cdots, y_{d-1})\} \cap B(x, r_x).$$

Il risultato principale ottenuto da Bass e Burdzy [1] è il seguente:

**Teorema 1.1** *Sia $D$ un dominio hölderiano di ordine $\alpha$, $\alpha \in ]1/2, 1]$. Sia $V$ un insieme aperto e $K \subset V$ un insieme compatto. Allora esiste una costante positiva $c(K, V, L)$ tale che se $u$ e $v$ sono funzioni $L$-armoniche positive che si annullano nei punti regolari di $(\partial D) \cap V$ e sono limitate in un intorno di $(\partial D) \cap V$, allora*

$$\frac{u(x)}{v(x)} \leq c(K, V, L) \frac{u(y)}{v(y)}$$

*per ogni $x, y \in K \cap D$.*

Questi risultati oltre a costituire un primo passo per una eventuale estensione ad operatori parabolici dei teoremi ottenuti nel caso ellittico possono fornire anche utili indicazioni in problemi con frontiera libera.
Seguendo la traccia del lavoro di Bass e Burdzy [1] ho elaborato una dimostrazione non probabilistica del teorema precedente nel caso di funzioni armoniche, evidenziando la dipendenza delle costanti da $K$, $V$ e $\alpha$. Prima di mostrare schematicamente il percorso attraverso il quale si giunge a questo risultato ricordiamo alcune proprietá della misura armonica.

# 2 La misura armonica

Se $D \subset R^d$ è un dominio regolare per il problema di Dirichlet e per l'operatore di Laplace, è noto che esiste una misura di Borel $\omega_D^x$ su $\partial D$ tale che:

$$u_g(x) = \int_{\partial D} g(\sigma) d\omega_D^x(\sigma) \tag{1}$$

è soluzione del problema di Dirichlet con $u_{|\partial D} = g$ nel senso che $u_g(x) \to g(P)$ per ogni $P \in \partial D$. Grazie al metodo di Perron, Wiener e Brelot è possibile generalizzare questa rappresentazione nel caso in cui $g$ è Borel misurabile su $\partial D$ e inferiormente limitata ( o superiormente limitata ) perchè sotto queste ipotesi

$$\overline{H}_g(x) = \underline{H}_g(x),$$

dove $\overline{H}_g$ e $\underline{H}_g$ sono rispettivamente la sopra-soluzione e la sotto-soluzione del problema generalizzato di Dirichlet per la funzione $g$ definita su $\partial D$. Inoltre vale anche la seguente formula:

$$H_g(x) = \int_{\partial D} g(\sigma) d\omega_D^x(\sigma)$$

per ogni $x \in D$.
Nel caso in cui poi $H_g = \overline{H}_g = \underline{H}_g$ sia armonica allora si dice che $g$ è risolutiva.Il concetto di misura armonica può essere ultriormente esteso anche al caso di funzioni $h-$armoniche.

**Def. 2.1** *Una funzione $u$ definita su $D$ è $h-$armonica se esiste una funzione armonica $v$ tale che*

$$u(x) = \frac{v(x)}{h(x)}$$

*e $h$ positiva è armonica.*

Se $u$ è $h-$armonica allora:

$$\frac{1}{2}\Delta u + < \nabla u, \nabla h >= 0$$

per ogni $x \in D$. In questo caso è possibile utilizzare il metodo di Perron, Wiener e Brelot per ottenere soluzioni generalizzate del problema seguente:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u + < \nabla u, \nabla h >= 0 & \text{per ogni } x \in D \\ u_{|\partial D} = g. \end{cases}$$

Indicando con $\overline{H}_g^h$ e $\underline{H}_g^h$ rispettivamente la sopra-soluzione e la sotto-soluzione del precedente problema di Dirichlet, se $g$ è Borel misurabile su $\partial D$ allora

$$H_g^h(x) = \overline{H}_g^h(x) = \underline{H}_g^h(x)$$

ed inoltre vale la seguente formula:

$$H_g^h(x) = \int_{\partial D} g(\sigma) d\omega_D^{x,h}(\sigma),$$

per ogni $x \in D$, dove $\omega_D^{x,h}$ è la misura armonica.
Se poi $H_g^h$ è $h$-armonica allora si dice che $g$ è $h$-risolutiva. In generale sia nel caso armonico che in quello $h-$armonico non è detto che pur essendo $u$ $h-$risolutiva si abbia che:

$$H_g^h(x) \to g(P)$$

per $x \to P \in \partial D$. Quando ciò accade si dice che il punto $P$ è regolare.

# 3 L'approccio probabilistico

Non è casuale che il Teorema 1.1 sia stato ottenuto da due probabilisti. Infatti il cosiddeto 'approccio probabilistico' consente di studiare il problema di Dirichlet in forma 'naturalmente' più debole di quanto la teoria del potenziale non permetta. Senza

entrare troppo nei dettagli ricordiamo che un processo stocastico $(X_t)_{t\in R^+\cup\{0\}=R_+}$ è una famiglia di funzioni misurabili definite da uno spazio di probabilitá $\Omega$ a valori in uno spazio $E$ misurabile detto spazio degli stati. Un processo stocastico $W_t$ che gode delle seguenti proprietá:

1) $E[W_t] = 0$ per ogni$t \in R_+$;
2) $K(s,t) = Cov(W_t, W_s) = \min\{s,t\} = s \wedge t, \ \ s,t \in R_+$;
3) per quasi ogni $\omega \in \Omega$, $W.(\omega)$ è continua e gli incrementi sono indipendenti;

e chiamato moto Browniano o processo di Wiener.
Ora se definiamo:

$$u(x) = E_x[g(W_{\tau_D})], \tag{2}$$

dove

$$\tau_D = \inf\{t > 0 : W_t \in \partial D\}$$

è una variabile aleatoria detta tempo di primo urto, allora per $D$ e $g$ sufficientemente regolari si dimostra che $u$ è soluzione del problema di Dirichlet in senso classico

$$\begin{cases} \Delta u & x \in D \\ u_{|\partial D} = g. \end{cases}$$

Per capire la relazione fra i due approcci osserviamo che con un cambiamento di variabili in (2) otteniamo:

$$u(x) = \int_{\partial D} g(y) P_x\{W_{\tau_D} \in ds_y\}$$

da cui segue ricordando (1):

$$P_x\{W_{\tau_D} \in ds_y\} = d\omega_D^x(y)$$

ovvero

$$P_x\{W_{\tau_D} \in \Sigma\} = \omega_D^x(\Sigma),$$

dove $\Sigma \subset \partial D$. Infine per concludere l'interpretazione probabilistica ricordiamo che il punto $x$ appartenente alla frontiera di $D$ è regolare per il problema di Dirichlet se:

$$P_x(\tau^*_{D^c} = 0) = 1,$$

viceversa $x \in \partial D$ è irregolare se

$$P_x(\tau^*_{D^c} = 0) = 0,$$

dove $\tau^*_D = \inf\{t > 0 : \ W_t \in D\}$.

# 4 Alcuni esempi

Esaminiamo ora qualche semplice insieme con frontiera hölderiana, per esempio il caso delle cuspidi algebriche:

$$C_e = \{\hat{y} > \|\tilde{y}\|^\alpha \cap B(0,R)\}, \quad C_u = \{\hat{y} < \|\tilde{y}\|^\alpha \cap B(0,R)\},$$

dove $\hat{y} = y_d$ e $\tilde{y} = (y_1, \cdots, y_{d-1})$ e $R$ è un numero positivo reale. Il vertice della cuspide $C_e$ è certamente un punto regolare in qualsiasi dimensione. Infatti è sufficiente applicare la condizione del cono esterno. Inoltre si dimostra con la stessa tecnica dei lavori [2] e [6] che una funzione armonica che si annulla nei punti regolari di $\triangle_{0,r}$, $r < R$ soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$u(x) \leq c(d)(\frac{\|x\|}{r})^\alpha \sup_{T_r} u$$

per ogni $x \in C_e$, $\|x\| < r$. Per la cuspide $C_u$ la situazione è diversa. Infatti se $d = 3$ l'origine è un punto regolare per ogni $\alpha \in ]0,1]$, mentre se $d > 3$ non lo è per nessun $\alpha \in ]0,1[$. In particolare quando $d = 3$ e $u$ è una funzione armonica che si annulla sui punti regolari di $\triangle_{0,\rho}$ in generale vale la seguente disuguaglianza ([5]):

$$u(x) \leq \exp\left(-k \int_{\|x\|}^{\beta\rho} \frac{\Gamma(C_s)}{s^{d-2}} ds\right) \sup_{T_\rho} u$$

per ogni $x \in C_u$, $r = \|x\| < \beta\rho$, dove $r < \rho < R\,\beta < \frac{1}{2}$, $\rho \in R^+$, $k$ è una costante positiva e $\Gamma(c_s) = cap(B(0,s) \cap D^c)$. Pertanto vale la seguente stima:

$$u(x) \leq (\frac{|\log r|}{|\log \|x\||})^{\tilde{k}} \sup_{T_\rho} u$$

per ogni $x \in C_u$, $\|x\| < r < \rho$ con $r$ e $\tilde{k}$ opportuni.

# 5 I risultati principali

Per rendere più agevole la comprensione dei prossimi risultati introduciamo alcune notazioni giá utilizzate da Bass e Burdzy.

$x = (\tilde{x}, \hat{x}) \in R^{d-1} \times R$; $\Gamma : R^{d-1} \to R$ è una funzione tale che:
per ogni $\tilde{x}, \tilde{y} \in R^{d-1}$, $|\Gamma(\tilde{x}) - \Gamma(\tilde{y})| \leq M(\|\tilde{x} - \tilde{y}\|^\alpha \wedge 1)$,
where $0 < \alpha < 1$ e $M > 1$ è una costante positiva.
$D = \{x \in R^d : \Gamma(\tilde{x}) < \hat{x}\}$, $\delta(x) = \hat{x} - \Gamma(\tilde{x})$
$\triangle(x,b,r) = \{y \in D : \|\tilde{x} - \tilde{y}\| < r,\ \delta(y) < b\}$ dove $b, r \in R^+$;
$F_a = \{y \in D :\ \delta(y) < a\}$ $a \in R^+$;
$\partial^u \triangle(x,b,r) = \{y \in \partial \triangle(x,b,r) :\ \hat{y} = \Gamma(\tilde{y}) + a\}$;
$\partial^s(x,b,r) = \{y \in \partial \triangle(x,b,r) :\ \|\tilde{x} - \tilde{y}\| = r\}$.

Le dimostrazioni dei seguenti lemmi e teoremi sono state ottenute con tecniche non-probabilistiche.

**Lemma 5.1** *Esiste una costante reale e positiva* $c_1 \in ]0,1[$ *per ogni* $x \in D$ *tale che se* $y \in \{z \in \triangle(x,b,r) : \tilde{z} = \tilde{x},\}$ *allora*

$$\omega^x_{\triangle(x,b,r)}(\partial^s \triangle (x,b,r)) < c_1^{[r/b]}$$

**Lemma 5.2** *Siano* $\lambda$, $\gamma$, $\delta$, $a$ *e* $R$ *cinque numeri reali e positivi tali che:* $0 < \delta \leq R$, $\gamma > 1$ *e* $a < \delta/2$. *Se* $\alpha \in ]0,1[$, *allora esistono due costanti* $c_2(\lambda, R)$, $c_3(\lambda, R)$ *tali che per ogni* $y \in \triangle(z,\lambda,a)$ *e* $z \in \triangle(x,\lambda,R-\delta)$ *vale:*

$$\omega^y_{\triangle(x,\gamma\lambda,R)}(\partial^u \triangle (x,\gamma\lambda,R)) \geq c_2 \exp\left(-dc_3\delta(y)^{1-1/\alpha}\right).$$

La dimostrazine del Lemma 5.2 si basa sostanzialmente sul fatto che è possibile stabilire il numero di palle concatenate che occorrono per connettere due punti $x, y \in \triangle(x,M,R)$ quando $\triangle(x,2M,2R) \subset D$. Grazie al Lemma 5.1 e al Lemma 5.2 otteniamo il seguente teorema

**Teorema 5.1** *Se* $\alpha \in ]1/2,1]$, $x \in \triangle(y,A,R)$ *con* $y \in D$ *e* $A, R \in R^+$, *allora esiste* $c_4(A,R)$ *costante positiva tale che:*

$$\omega^x_{\triangle(y,2A,2R)}(\partial^s \triangle (y,A,2R)) \leq c_4 \omega^x_{\triangle(y,2A,2R)}(\partial^g \triangle (y,2A,2R)),$$

*dove* $\partial^g \triangle (y,2A,2R) = \partial \triangle (y,2A,2R) \setminus (\partial D \cup \partial^s \triangle (y,A,2R))$.

**Lemma 5.3** *Sia* $v \in D \setminus \triangle(x,5A,5R)$, $h = G_D(v,\cdot)$ *dove* $G_D$ *è la funzione di Green su* $D$. *Allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$\omega^{x,h}_{\triangle(0,2A,2R)} \geq c_5(A,R)$$

*per ogni* $x \in \triangle(0,A,R)$, *dove* $c_5$ *è una costante positiva.*

Dal lemma precedente segue il seguente principio di Harnack. Le ipotesi con le quale operiamo sono tuttavia meno generali di quelle formulate da Bass e Burdzy.

**Teorema 5.2** *Sia* $\alpha \in ]1/2,1]$. *Supponiamo che* $u$ *e* $v$ *siano due funzioni armoniche su* $D$ *che si annullano regolarmente su ogni punto regolare di* $\partial D \cap \overline{\triangle(0,6A,6R)}$ *e sono limitate in un intorno di* $\partial D \cap \overline{\triangle(0,6A,6R)}$. *Allora esiste una costante* $c_6(A,R)$ *per cui:*

$$\frac{u(x)}{w(x)} \leq c_6 \frac{u(y)}{w(y)}$$

*per ogni* $x, y \in \triangle(0,A,R)$.

Il primo passo della dimostrazione consiste nel provare il Teorema 5.2 nel caso in cui la frontiera sia sufficientemente regolare. Infatti per il principio del massimo la seguente disuguaglianza vale per ogni $x \in \triangle(0, 2A, 2R)$:

$$\frac{u(x)}{w(x)} \geq \int_{\partial\triangle(0,2A,2R)} \frac{u}{w} \chi_{\partial^g \triangle(0,2A,2R)} d\omega^{x,h}_{\triangle(0,2A,2R)}(\sigma),$$

poi sfruttando il Lemma 5.3 e la disuguaglianza di Harnack è possibile ottenere la seguente relazione per ogni $x \in \triangle(0, A, R)$ e $x_0 \in \partial^g \triangle\ (0, 2A, 2R)$:

$$\frac{u(x)}{G_D(x,v)} \geq c_6 \frac{u(x_0)}{G_D(x_0,v)},$$

dove $G_D$ è la funzione di Green su $D$ e $v \in \triangle(0, 6A, 6R) \setminus \triangle(0, 5A, 5R)$. Successivamente grazie al fatto che la frontiera euclidea quando è sufficientemente regolare può essere identificata con la frontiera di Martin [7], abbiamo per il teorema di Martin la tesi:

$$u(x)w(x_0) \geq c_6 u(x_0)w(x).$$

Il secondo passo consiste nel considerare una opportuna successione decrescente di funzioni i cui grafici approssimano uniformemente il grafico di $\Gamma$. I domini ottenuti a partire dai grafici corrispondenti alle funzioni approssimanti ci consentono di applicare il teorema dimostrato al passo uno considerando rispettivamente:

$$u_n \text{ e } w_n, \text{ dove } u - n = H_{u\phi} \text{ e } w_n = H_{w\phi} \text{ su } D_n,$$

mentre $\phi \in C_0^\infty$ è cosí definita:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & se\, x \in \{x \in R^d : \|\tilde{x}\| \leq 5R\} \\ 1 & se\, x \in \{x \in R^d : \|\tilde{x}\| \geq 6R\} \end{cases}$$

Per il principio del massimo e con opportune considerazioni riguardanti la misura armonica abbiamo che per ogni $x, y, x_0 \in \triangle(0, A, R)$ vale

$$\begin{array}{ll} u_n(x) \to u(x), & u_n(x_0) \to u(x_0), \\ w_n(y) \to w(y), & w_n(x_0) \to w(x_0), \end{array}$$

al tendere di $n$ all'infinito; da ciò segue l'asserto.
Per concludere vediamo un cenno della dimostrazione del Lemma 5.1. Non è restrittivo supporre che $x \equiv 0$ e considerare il caso in cui $r = kb$. Per ogni $y \in \triangle(x, b, kb)$ studiamo:

$$\omega^y_{\triangle(0,b,kb)}(\partial^s \triangle\ (0, b, kb)).$$

Definiamo poi per ogni $w \in F_b$ il seguente insieme R(w,2b,b):

$$R(w, 2b, b) = \{y \in R^d : \ \|\tilde{y} - \tilde{w}\| < 2b\}$$

e supponiamo di aver provato che:

$$0 < \sup_{w \in F_b} h_w(w) < c_1 < 1,$$

dove $h_w(w) = \omega^w_{R(w,2b,b)}(F_b \cap \partial R(w, 2b, b))$. Per il principio del massimo si ha che per ogni $y \in \triangle(0, b, (k-1)b)$ vale:

$$u_k \equiv \omega^y_{\triangle(0,b,kb)} \leq c_1 \omega^y_{\triangle(0,b,(k-1)b)}(\partial^s \triangle (0, b, (k-1)b)) = c_1 u_{k-1}(y).$$

Pertanto iterando il procedimento si ottiene la tesi. Rimane da provare che:

$$0 < \sup_{w \in F_b h_w(w)} = c_1 < 1.$$

Se consideriamo l'insieme $S$ cosí definito:

$$S = \{\Sigma : \Sigma = \partial R(w, 2b, b) \cap F_b - w, \ \ w \in F_b\},$$

allora

$$\sup_{\Sigma \in S} \omega^0_{R(0,2b,b)}(\Sigma) = \sup_{w \in F_b} h_w(w) = c_1.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\sup_{\Sigma \in S} \omega^0_{R(0,2b,b)}(\Sigma) < 1.$$

Poichè ci siamo ricondotti ad un cilindro la cui frontiera è lipschitziana, possiamo applicare il seguente risultato dovuto a Dahlberg, ([3]):

**Teorema 5.3** *Esistono $\delta > 1/2$, $\beta$ e $C$ costanti positive tali che, se $F \subset \partial\Omega$ allora:*

$$\omega^0_\Omega(F) \leq C(\sigma(F))^\delta,$$
$$\sigma(F) \leq C(\omega^0_\Omega(F))^\beta,$$

*dove $\sigma$ è la misura di superficie.*

Vediamo nei dettagli la conclusione della dimostrazione solo nel caso $d = 3$, d'altra parte se $d > 3$ la prova è analoga. Per il Teorema [3] se dimostriamo che esiste $m \in R^+$ tale che per ogni $\Sigma \in S$ vale:

$$\sigma(\partial R(0, 2b, b) \setminus \Sigma) = m > 0$$

allora la tesi risulterá provata. Posto:

$$\partial^s R(0, 2b, b) = \{y \in R : \ \|\tilde{y}\| = b\},$$

possono verificarsi i due seguenti casi:

$$\text{i) } \Sigma \subset \partial^s R(0, 2b, b),$$
$$\text{ii) } \Sigma \not\subset \partial^s R(0, 2b, b).$$

Nel primo caso per il principio di Cavalieri $\sigma(\Sigma) = 2\pi b^2$, quindi:

$$\sigma(\partial R(0, 2b, b) \setminus \Sigma) = \sigma(\partial R(0, 3b/2, b)) = 8\pi b^2 > 0.$$

Nel secondo caso:

$$\sigma(\partial R(0, 2b, b) \setminus \Sigma) \geq \sigma(\partial^s R(0, 3b/2, b) = 6\pi b^2 = m > 0.$$

# Riferimenti bibliografici


[1] **R.F. Bass, K. Burdzy**: *A boundary Harnach principle for twisted Hőlder domains*, in Ann. of Math. 134 (1991), 253-276.

[2] **L. Caffarelli, E. Fabes, S. Mortola , S. Salsa**: *Boundary behavior of non-negative solutions of elliptic operators in divergence form*, in Indiana Math. J.30(1981), 621-640.

[3] **B.E.J. Dahlberg**: *Estimates of Harmonic Measure*, in Arch. Rat. Mech. Anal. 65(1977), 275-288.

[4] **J.L. Doob**: Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart, Springer-Verlag (1984).

[5] **M. Gruter, K.O.Widman**: *The Green function for uniformely elliptic equations*, in Manuscripta mathematica 37, 303-342 (1982).

[6] **D.S. Jerison , C.E. Kenig** : *Boundary Behavior of Harmonic Functions in Non-tangentially Accessible Domains* , Advances in mathematics 46, 80-147 (1982).

[7] **Helms**: Introduction to potential theory, Wiley-Interscience series in Pure and Applied Matematics (vol XXII) (1969).

[8] **S.Salsa**: *Comportamento alla frontiera per soluzioni di equazioni ellittiche e paraboliche*, in Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, vol LVII (1987).